数理解析研究所講究録
452巻 1982年 125-138

共用型窓口の効果について

茨城大 工学部 佐藤 司
同 森 雅夫

1. モデルについて

J航空会社における電話予約サービス業務を考える。今、このサービスセンターには国内線、国際線の両方の客が電話して来る。そして、これらの客を処理するために国内線専用国際線専用窓口をもうけてある。このようなやり方だと、国際線の受付が手一杯なのに国内線が手空きとなるような不都合な事も多い。だからといって全員が両方の受付けをできるように訓練することも大変である。そこで、係の何人かを訓練して両方の受付をできるようにすると、混雑の整理にどれ程役立つかを調べてみたい。

ここで、次のようなモデルを考える。

〈1〉. 国内線専用窓口、国際線専用窓口、共用窓口が各々 S_1、S_2、S_3個あり、$S_1+S_2+S_3=S$ とする。

〈2〉. 国内線、国際線のサービスを受けようとする客の到

着間隔は各々、平均$\frac{1}{\lambda_1}$、$\frac{1}{\lambda_2}$の指数分布に従う。

〈3〉. 各国内線専用窓口、各国際線専用窓口におけるサービス時間は各々、平均$\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$の指数分布に従う。

共用窓口におけるサービスは、混惑などによる処理能力の低下を考えて、

〈4〉. 各共用窓口における国内線、国際線のサービス時間は各々、平均$\frac{1}{\mu_3}$, $\frac{1}{\mu_4}$の指数分布に従う。

とし、

〈5〉. 国内線専用窓口、国際線専用窓口が各々ふさがっているとき、到着した双方の客は共用窓口に流れ込む。

とする。

このモデルにおいて、システムの状態として、国内線専用窓口の客の占有数i_1、国際線専用窓口の客の占有数i_2、共用窓口で国内線のサービスを受けている客の数i_3、共用窓口で国際線のサービスを受けている客の数i_4の組(i_1, i_2, i_3, i_4)をとることによって、時間パラメータ連続のマルコフ連鎖を導くことができる。このとき、国内線専用窓口の客の占有数i_1によって状態を組分けすると、このマルコフ連鎖を記述する無限小生成作用素$\tilde{Q}$は、次のようなブロック三重対角行列となる。

$$
(1) \text{ ------ } \tilde{Q} = \begin{array}{c} \\ \underline{0} \\ \underline{1} \\ 2 \\ \vdots \\ \\ \underline{s_1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & & & \underline{s_1} \end{array} \\
\left|\begin{array}{cccccc}
T & \lambda_1 I_m & O_m & \cdots & \cdots & O_m \\
\mu_1 I_m & T-\mu_1 I_m & \lambda_1 I_m & \ddots & & \vdots \\
O_m & 2\mu_1 I_m & T-2\mu_1 I_m & \lambda_1 I_m & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_m \\
 & & \ddots & (s_1-1)\mu_1 I_m & T-(s_1-1)\mu_1 I_m & \lambda_1 I_m \\
O_m & \cdots & \cdots & O_m & s_1\mu_1 I_m & T+\Lambda_1-s_1\mu_1 I_m
\end{array}\right|
\end{array}
$$

ここで、$\underline{i_1}$ $(0 \leqq i_1 \leqq s_1)$は、国内線専用窓口の客の占有数がi_1であるような状態の組を表わしている。$m=(s_2+1)(s_3+1)(s_3+2)/2$として、$I_m$は$m \times m$単位行列、$O_m$は$m \times m$零行列を表わし、$T$や$\Lambda_1$は同じ組間の推移率を表わす無限小生成作用素のなす$m \times m$行列である。

また、$\underline{e}_{\hat{a}}$、$\underline{e}_m$を各々、すべての要素が1の$(s_1+1)m$次元列ベクトル、m次元列ベクトルとし、$\underline{0}_{\hat{a}}$、$\underline{0}_m$を各々、すべての要素が0の$(s_1+1)m$次元列ベクトル、m次元列ベクトルとすると、

$$(2) \text{ ------ } \hat{Q}\underline{e}_{\hat{a}} = \underline{0}_{\hat{a}}$$

より、

$$(3) \text{ ------- } \begin{array}{l} (T+\lambda_1 I_m)\underline{e}_m = \underline{0}_m \\ (T+\Lambda_1)\underline{e}_m = \underline{0}_m \end{array}$$

がいえる。

さらに、無限小生成作用素Tを詳細に表わすために、状態

$\underline{0}=(0, i_2, i_3, i_4)$から$\underline{0}$への推移を考える。このとき、国際線専用窓口の客の占有数i_2によって状態をさらに組分けすると、無限小生成作用素Tは、

$$
(4) \text{------} \; T = \begin{array}{c|cccccc|}
 & \underline{0}' & \underline{1}' & \underline{2}' & & & \underline{S_2}' \\
\hline
\underline{0}' & T\ell & \lambda_2 I_n & O_n & \cdots & \cdots & O_n \\
\underline{1}' & \mu_2 I_n & T\ell-\mu_2 I_n & \lambda_2 I_n & & & \vdots \\
\underline{2}' & O_n & 2\mu_2 I_n & T\ell-2\mu_2 I_n & \lambda_2 I_n & & \vdots \\
 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_n \\
 & \vdots & & \ddots & (S_2-1)\mu_2 I_n & T\ell-(S_2-1)\mu_2 I_n & \lambda_2 I_n \\
\underline{S_2}' & O_n & \cdots & \cdots & O_n & S_2\mu_2 I_n & T\ell+\Lambda_2-S_2\mu_2 I_n
\end{array}
$$

と表わされ、これもブロック三重対角行列となっている。ここで、$\underline{i_2}'$ $(0 \leqq i_2 \leqq S_2)$は国際線専用窓口の客の占有数がi_2であるような状態の組$(0, i_2, i_3, i_4)$ $(0 \leqq i_2 \leqq S_2)$を表わしており、$n=(S_3+1)(S_3+2)/2$として、I_nは$n \times n$単位行列、$T\ell$、Λ_2は$n \times n$行列である。

一見、(1)式は、$PH/M/C(N)$モデルから導かれたマルコフ連鎖の無限小生成作用素$\tilde{Q}$([4], Chap.3)において、$N=C=S_1$, $T^0A^0=\lambda_1 I_m$, $\mu=\mu_1$として、状態$\underline{N}=\underline{S_1}$から$\underline{N}=\underline{S_1}$への無限小生成作用素$T+T^0A^0-C\mu I$を$T+\Lambda_1-S_1\mu_1 I_m$と置いたものと似ている。これから上の問題を$PH/M/S_1(S_1)$モデルとして定式化できるかに思えるが、そうはいかない。というのは、$PH/M/S_1(S_1)$モデルでは$T^0A^0=\lambda_1 I_m=\Lambda_1$が成り立っているが、我々の問題で

$\lambda_1 I_m \neq \Lambda_1$ であり、さらに、$T^0 A^0$の意味する所から$T^0 A^0 = \lambda_1 I_m$も成り立たない。したがって、$PH/M/c(N)$モデルの解析法をそのまま利用するわけにはいかない。次節では、(1)式で表わされたマルコフ連鎖の定常分布$\underline{X}$を求めるアルゴリズムを紹介しよう。

2. アルゴリズム

状態の組分けに対応して定常分布$\underline{X}$も小ベクトルに分割して、

(5) ------- $\underline{X} = [\underline{X}_0, \underline{X}_1, \underline{X}_2, \text{-------}, \underline{X}_{s_1}]$

と表わす。定常分布$\underline{X}$は、$\underline{X}\tilde{Q} = \underline{0}_{\tilde{q}}$を満たすから、状態方程式は、

(6) --------
$$\begin{aligned}
&\underline{X}_0 T + \mu_1 \underline{X}_1 = \underline{0}_m \\
&\lambda_1 \underline{X}_{i_1-1} + \underline{X}_{i_1}(T - i_1\mu_1 I_m) + (i_1+1)\mu_1 \underline{X}_{i_1+1} = \underline{0}_m \quad (1 \leqq i_1 \leqq s_1-1) \\
&\lambda_1 \underline{X}_{s_1-1} + \underline{X}_{s_1}(T + \Lambda_1 - s_1\mu_1 I_m) = \underline{0}_m
\end{aligned}$$

(7) -------- $\displaystyle\sum_{i_1=0}^{s_1} \underline{X}_{i_1} \underline{e}_m = 1$

となる。(6)式の両辺に右から$\underline{e}_m$を掛けて、(3)式を使うと、

(8) -------- $\underline{X}_{i_1} \underline{e}_m = \dfrac{1}{i_1!}\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{i_1} \underline{X}_0 \underline{e}_m \quad (1 \leqq i_1 \leqq s_1)$

を得る。(8)式を(7)式に代入して、

$$\sum_{i_1=0}^{s_1} \underline{X}_{i_1} \underline{e}_m = \sum_{i_1=0}^{s_1} \frac{1}{i_1!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{i_1} \underline{X}_0 \underline{e}_m = 1$$

したがって、

$$(9)\ \text{--------}\ \underline{x}_{i_1} e_m = \frac{1}{i_1!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{i_1} \Big/ \sum_{j=0}^{s_1} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{j} \qquad (0 \leqq i_1 \leqq s_1)$$

を得る。この(9)式は、定常状態において国内線専用窓口の客の占有数が $i_1\ (0 \leqq i_1 \leqq s_1)$ である確率を表わしている。

つぎに、$K(i_1) = T - i_1\mu_1 I_m$、$L(i_1) = i_1\mu_1 I_m$ とおくと、(6)式は、

$$(10)\ \text{--------}\ \begin{aligned} &\underline{x}_0 K(0) + \underline{x}_1 L(1) = O_m \\ &\lambda_1 \underline{x}_{i_1-1} + \underline{x}_{i_1} K(i_1) + \underline{x}_{i_1+1} L(i_1+1) = O_m \quad (1 \leqq i_1 \leqq s_1-1) \\ &\lambda_1 \underline{x}_{s_1-1} + \underline{x}_{s_1}(K(s_1) + \Lambda_1) = O_m \end{aligned}$$

と書き替えられる。これを行列表示すると、

$$(11)\ \text{-------}\ [\underline{x}_0, \text{------}, \underline{x}_{s_1}] \begin{vmatrix} K(0) & \lambda_1 I_m & O_m & & & O_m \\ L(1) & K(1) & \lambda_1 I_m & & & \\ O_m & L(2) & K(2) & \lambda_1 I_m & & \\ & & & & & O_m \\ & & & L(s_1-1) & K(s_1-1) & \lambda_1 I_m \\ O_m & & & O_m & L(s_1) & K(s_1)+\Lambda_1 \end{vmatrix} = [O_m, \text{------}, O_m]$$

となる。次にこの行列を変形して、$\underline{x}_i$ を $\underline{x}_{i-1}$ だけの関係式で表わすように工夫する。

まず、$\{$才(s_1-1)列$\times (K(s_1)+\Lambda_1)\} - \{$才$s_1$列$\times L(s_1)\}$ とすると、才(s_1-1)列は、

$$\left|\begin{array}{l} O_m \\ \\ \\ O_m \\ \lambda_1(K(s_1)+\Delta_1 \\ K(s_1-1)(K(s_1)+\Delta_1)-\lambda_1 L(s_1) \\ O_m \end{array}\right| \overset{put}{=} \left|\begin{array}{l} O_m \\ \\ \\ O_m \\ R(s_1-1) \\ S(s_1-1) \\ O_m \end{array}\right|$$

となり、

$$[\underline{x}_0, \text{------}, \underline{x}_{s_1}]\left|\begin{array}{cccccc} K(0) & \lambda_1 I_m & O_m & & & O_m \\ L(1) & K(1) & \lambda_1 I_m & & & \\ O_m & & & & & \\ & & L(s_1-2) & K(s_1-2) & R(s_1-1) & O_m \\ & & & L(s_1-1) & S(s_1-1) & \lambda_1 I_m \\ O_m & & & O_m & O_m & K(s_1)+\Delta_1 \end{array}\right| = [\underline{O}_m, \text{-------}, \underline{O}_m]$$

を得る。以下、同様の手順をふむことにより、

(12) -------

$$[\underline{x}_0, \text{------}, \underline{x}_{s_1}]\left|\begin{array}{cccccc} S(0) & R(1) & O_m & \cdots & & O_m \\ O_m & S(1) & R(2) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & O_m & S(s_1-2) & R(s_1-1) & O_m \\ \vdots & & & O_m & S(s_1-1) & \lambda_1 I_m \\ O_m & \cdots & & & O_m & K(s_1)+\Delta_1 \end{array}\right| = [\underline{O}_m, \text{------}, \underline{O}_m]$$

を得る。ここで、$S(s_1)=K(s_1)+\Delta_1$、$R(s_1)=\lambda_1 I_m$ とおくと、

(13) -------
$$S(i_1) = K(i_1)S(i_1+1) - R(i_1+1)L(i_1+1) \qquad (s_1-1 \geqq i_1 \geqq 0)$$
$$R(i_1) = \lambda_1 S(i_1+1) \qquad (s_1-1 \geqq i_1 \geqq 0)$$

で表わされる。つまり、$\tilde{Q}$と等価なブロック二重対角行列を得たことになる。これを解くのは容易である。

まず、(12)式より、

(14) ------- $\underline{x}_0 S(0) = \underline{O}_m$

を得る。また、(9)式より、

$$(15) \text{-------} \quad \underline{X}_0 \underline{e}_m = 1 \Big/ \sum_{j=0}^{s_1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^j$$

である。これら(14)式、(15)式の連立m次元方程式の解がベクトル$\underline{X}_0$になっている。そこでS(0)の才1列を$\underline{e}_m$に替えて、S(0)の残りの部分をSℓとすると、

$$(16) \text{-------} \quad \underline{X}_0 [\underline{e}_m, S\ell] = \left[1 \Big/ \sum_{j=0}^{s_1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^j, \underline{0}_m, \text{-----}, \underline{0}_m \right]$$

よって、(16)式の両辺に右から$[\underline{e}_m, S\ell]^{-1}$を掛けて、

$$(17) \text{-------} \quad \underline{X}_0 = \left[1 \Big/ \sum_{j=0}^{s_1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^j, \underline{0}_m, \text{------}, \underline{0}_m \right] [\underline{e}_m, S\ell]^{-1}$$

を得る。ここで、$\underline{X}_0$が求まったので(11)式を用いて、次々に

$$(18) \text{-------} \quad \begin{aligned} \underline{X}_1 &= -\underline{X}_0 K(0) L^{-1}(1) \leqq -\frac{1}{\mu_1} \underline{X}_0 T \\ \underline{X}_{i_1} &= -[\lambda_1 \underline{X}_{i_1-2} + \underline{X}_{i_1-1} K(i_1-1)] L^{-1}(i_1) \\ &= -\frac{1}{i_1 \mu_1} [\lambda_1 \underline{X}_{i_1-2} + \underline{X}_{i_1-1} K(i_1-1)] \qquad (2 \leqq i_1 \leqq S_1) \end{aligned}$$

が得られる。

以上により定常分布$\underline{X}$が求められたが、このモデルでは次のような諸特性量が興味の対象となろう。定常状態において国内線のサービスを受けようとする客の呼損率P_1、国際線のサービスを受けようとする客の呼損率P_2とすると、それぞれ

(19) ------- $P_1 = P_r\{$国内線専用窓口と共用窓口が共にふさがっている$\}$

$$= \sum_{j:i_3+i_4=S_3} [\underline{X}_{S_1}]_j$$

(20) ------- $P_2 = P_r\{$国際線専用窓口と共用窓口が共にふさがっている$\}$

$$= \sum_{i_1=0}^{S_1} \sum_{j:i_2=S_2,\, i_3+i_4=S_3} [\underline{X}_{i_1}]_j$$

で与えられる。また、システム全体の呼損率を評価するために、

(21) ------- $$P_t = \frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

なる量を考え、これを*Total Loss Rate* (*T.L.R.*) と呼ぶことにする。この T. L. R. P_t はシステム全体に対する任意の客の呼損率を表わす量と考えられる。次にいくつかの数値例の結果を紹介する。

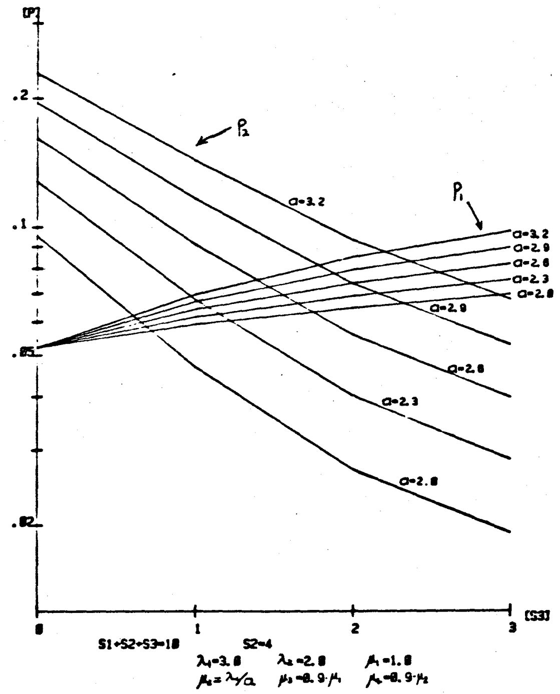
3、数値例

ここでは、いくつかのケースに対して呼損率を計算してみよう。その一部をグラフにしたのが〔G.1〕,〔G.2〕である。これらのグラフは総窓口数 $S_1+S_2+S_3$、国際線専用窓口数 S_2 を一定にし、横軸に共用窓口数 S_3、縦軸に呼損率を取ったものである。また、a の値を変化させていくことにより国際専用窓口における客のサービス率 μ_2、共用窓口の国際線の客のサービス率 μ_4 を変えていき、共用窓口の効果がどのようになるかを見ている。ただし、いずれも $\mu_3 = 0.9\mu_1$, $\mu_4 = 0.9\mu_2$ としている。グラフ〔G.1〕,〔G.2〕のいずれにおいても共用窓口数 S_3 を増す

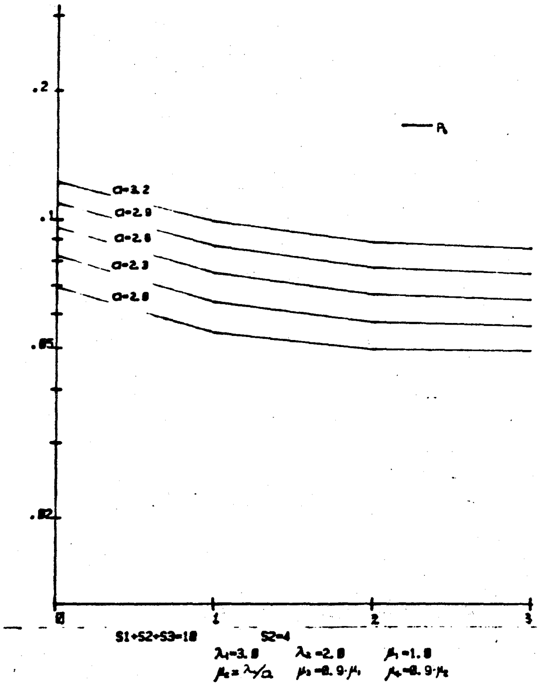
に従い、国内線の客の呼損率P_1が増加し、国際線の客の呼損率P_2が減少していく傾向が分る。そして、P_1の増加する割合は、P_2の減少する割合よりもかなり小さい。この結果、システム全体に対する任意の客の呼損率$T.L.R.P_t$は減少していく。（[G.2]を見よ。）

また、次の[Tab.1]は、$S_1+S_2+S_3=10$、$\lambda_1=3$、$\lambda_2=2$、$\mu_1=\mu_2=1$、$\mu_3=\mu_4=0.9$として、S_1、S_2、S_3をいろいろ変化させたときのP_1、P_2、P_tの値を表にしたものである。この表において共用窓口がない場合($S_3=0$)には、$S_1=6$、$S_2=4$でP_tが最小になるが、共用窓口が許される場合には、$S_1=4$、$S_2=2$、$S_3=4$でP_tが最小になり、前者は後者の2倍以上になっている。このことから、この数値例においては、共用窓口を許したことによりシステムがかなり向上したことが分る。これらの計算結果をもとにして、適当なコストを導入することにより、よりよいシステムの設計が可能となろう。

以上の数値例では、いずれの場合にも$\mu_3=\alpha\mu_1$，$\mu_4=\alpha\mu_2$としたものであったが、能率低下の係数αの値によっては上述の結果はかならずしもあてはまらないであろう。



[G.1] 各タイプの客の呼損率



[G.2] 任意の客の呼損率(T.L.R.)

[総窓口数を10とし、国際線専用窓口数S_2を4として、共用窓口数S_3を変化させたときの呼損率の変化を表わす。ここで、 $a = \lambda_2 / \mu_2$

$$T.L.R.\ P_t = \frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

である。]

[Tab. 1] $S_1+S_2+S_3=10$、$\lambda_1=3$、$\lambda_2=2$
$\mu_1=\mu_2=1$、$\mu_3=\mu_4=0.9$

S_1	S_2	S_3	P_1	P_2	P_t
8	2	0	0.00813	0.40011	0.16492
7	2	1	0.01324	0.22371	0.09743
6	2	2	0.01878	0.11731	0.05822
5	2	3	0.02364	0.06388	0.03974
4	2	4	0.02751	0.04060	0.03275
7	3	0	0.02186	0.21038	0.09727
6	3	1	0.02870	0.10690	0.05998
5	3	2	0.03446	0.05597	0.04306
4	3	3	0.03898	0.03435	0.03713
6	4	0	0.05216	0.09528	0.06941
5	4	1	0.05925	0.04694	0.05433
4	4	2	0.06484	0.02706	0.04973
3	4	3	0.06982	0.01916	0.04956
5	5	0	0.11005	0.03672	0.08072
4	5	1	0.11698	0.01916	0.07852
3	5	2	0.12352	0.01261	0.07916

4、今後の問題

ところで、定常分布 $\underline{X}$ は状態方程式(6)、(7)を解くことによって求められるが、この方程式は$(S_1+1)(S_2+1)(S_3+1)(S_3+2)/2$個の未知数(これは非常に多数)を含み、このまま数値計算を行うにはかなり大きい容量をもつ計算機でさえ不可能な場合がある。そこで、ここではこの方程式を解くのに、$\underline{X}_i$ を $\underline{X}_{i-1}$ だけの関係式で表わし、$\underline{X}_i \underline{e}_m$ $(0 \leqq i \leqq S_1)$ の情報((19)式)を使うことにより、方程式を$(S_1+1)(S_2+1)(S_3+1)(S_3+2)/2$元から$(S_2+1)(S_3+1)(S_3+2)/2$元に下げ、その$(S_2+1)(S_3+1)(S_3+2)/2$元連立方程式を直接解いた。さらに、前述のアルゴリズムで(11)式の行列を変形して $\underline{X}_i$ を $\underline{X}_{i-1}$ だけの関係式で表わす際に $m \times m$ 行列の積と差を重ねて

行うため数値計算においてはかなり丸め誤差がきいてきた。このことからここで述べた計算法ではまだ十分とは言えず、もっと生成行列の次元を低次元に落して計算ができ、計算誤差の少ないような方法が使われることが望ましい。

そこで、現在、高橋[5]による *lumping method* を用いると、計算の効率がどのくらい改良されるかについて検討している。この場合、国内線専用窓口の客の数 i_1 だけで *lump* すると、その計算の手間は我々の方法とたいして変らない。そこで、(i_1, i_2) で *lump* すると、各ブロックの数がかなり小さくできる。しかし、このように *lump* するとブロック三重対角の形がくずれ、高橋[5]の一般の場合の方法を用いねばならない。この方法だと、確かに我々の方法より窓口数の大きい場合の計算が可能となるが繰り返えし数が多くなるため、計算時間が相当に長くなる。詳しくは新めて発表したい。

References

[1] Neuts, M. F. (1978) Markov chain with application in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant vector, *Adv. Appl. Prob.* 10, 185-212.

[2] Neuts, M. F. (1979) Queues solvable without Rouche's theory, *Operations Reseach* 27, 767-781.

[3] Neuts, M. F. (1980) The probabilistic significance of the rate matrix in matrix-geometric invariant vector, *J. Appl. Prob.* 17 , 291-296.

[4] Neuts, M. F.(1981) *Matrix-geometric solutions in stochastic models——An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press.

[5] Takahashi, Y. (1975) A lumping method for numerical calculations of stationary didtributions of Markov chains, *Reseach Report on Information Sciences* B-18, Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology.

[6] 高橋幸雄 (1981) 状態方程式を解く，オペレーションズ・リサーチ 26, 190-196.

[7] 森村英典，大前義次 (1975) 応用待ち行列理論，日科技連出版社.